Toets Relativiteit 13-122-12, Uitwerking

1a) Het relativiteitsbeginsel: Natuurwetten zijn in elk inertiaalstelsel hetzelfde.
De lichtsnelheid is in alle inertiaalstelsel hetzelfde.

b) Beschouw een lichtklok met lengte L die in rust is in het Other Frame en met constante snelheid beweegt t.o.v. het Home frame.
In het Other Frame legt het licht tussen twee reflecties de afstand 2L af in tijd $\Delta t'$, d.w.z.
$\Delta t' = 2L$
In het Other Frame is dit een ruimtetijd interval , d.w.z. $\Delta s = 2L$
In het Home Frame legt het licht de afstand $2\sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}$ af tussen twee reflecties in tijd Δt.
d.w.z.: $\Delta t^2 = 4L^2 + \Delta x^2$.
Combinatie geeft: $\Delta t^2 = \Delta s^2 + \Delta x^2$, waaruit volgt: $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$

c) Causaliteit: Als een gebeurtenis P een andere gebeurtenis Q veroorzaakt, dat moet P in alle inertiaalstelsels eerder plaats vinden dan Q .

2a)

	coördinaattijd	eigentijd	ruimtetijd
Henk	Ja, (van het perron)	nee	nee
Ingrid	Ja, (van de trein)	ja	ja

2b correct

2c niet correct

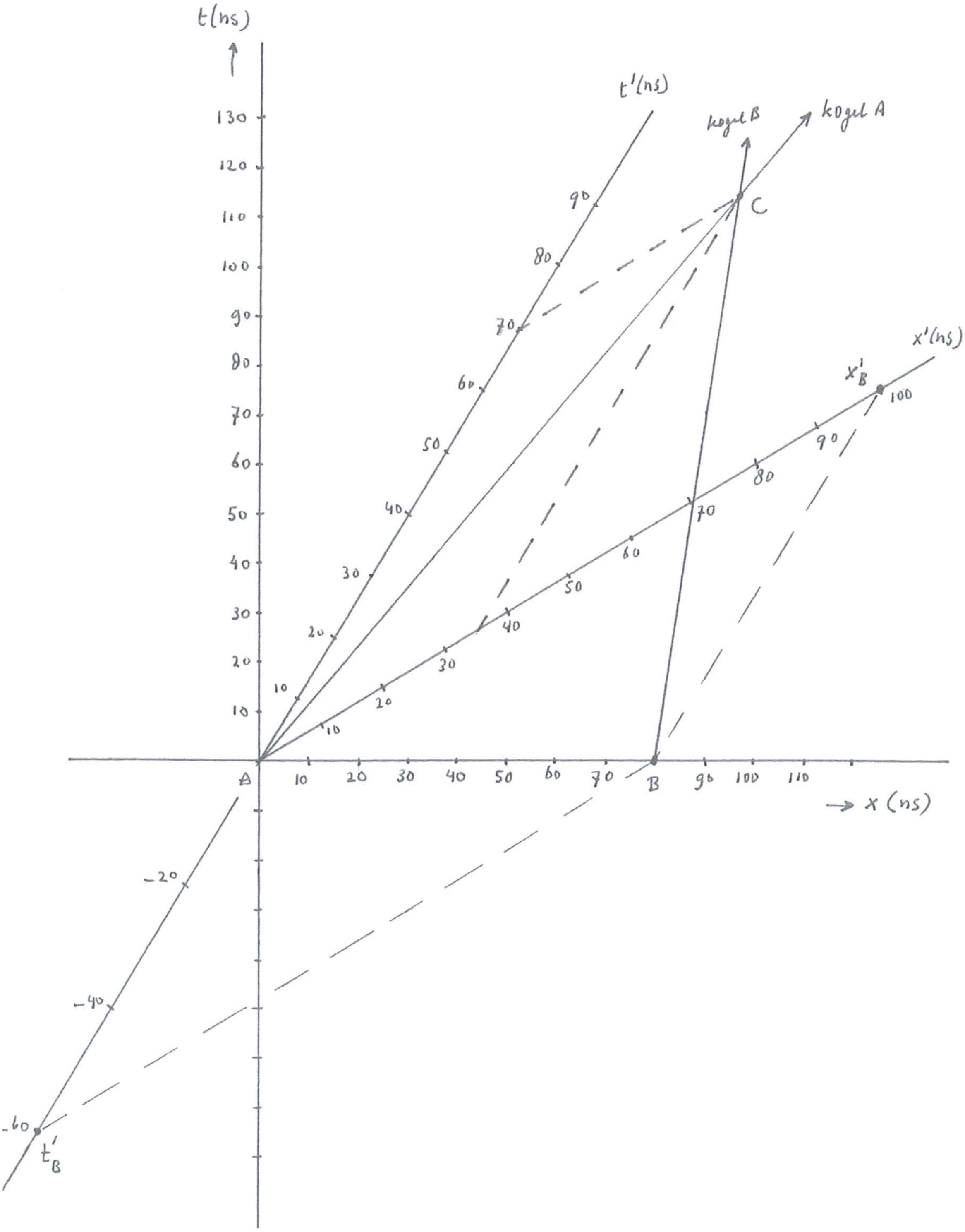
2d Henk het coördinaattijdverschil van het perron tussen zijn passeren van de beide uiteinden van het perron. Iemand op het perron zou hetzelfde aflezen tussen de passage van Henk langs de twee klokken. Henk beweegt met snelheid v. De lengte van het perron (in het stelsel van het perron is dus $L = v\,\Delta t$. Dit is ook de rustlengte van de trein.
De werkwijze van Ingrid levert de gecontraheerde lengte van het perron. Het is de lengte van het perron in het stelsel van de trein: $L' = \frac{v\Delta t'}{\gamma}$.
Opmerking: Als men zou aannemen dat de trein geen constante snelheid heeft, dan zijn zowel de procedure van Henk als de procedure van Ingrid incorrect. Immers, men kan geen afstand bepalen door een tijdspanne te vermenigvuldigen met een variabele snelheid. Men zou dan de snelheid over de tijd moeten integreren. Voor Ingrid blijft daarboven op nog het argument dat ze ook dan de gecontraheerde lengte van het perron meet.

Opgave 3

3a) Kogel van Piet: $v'_P = 0{,}5 \rightarrow v_P = \frac{v'_P+\beta}{1+\beta v'_P} = \frac{0{,}5+0{,}6}{1+0{,}5\cdot 0{,}6} = \frac{1{,}1}{1{,}3} = \frac{11}{13} = 0{,}846$

Kogel van Jan: $v'_J = -0{,}5 \rightarrow v_J = \frac{v'_J+\beta}{1+\beta v'_J} = \frac{-0{,}5+0{,}6}{1+(-0{,}5)\cdot 0{,}6} = \frac{0{,}1}{0{,}7} = \frac{1}{7} = 0{,}143$

3b)
zie figuur



$\gamma = 1{,}25$
$\Delta t = \gamma \Delta\tau \rightarrow$ een eenheid op de t'-as is een eigentijd interval in het Other Frame, dus als bijv. $\Delta t' = \Delta\tau = 100\, ns$, dan komt dat overeen met $\Delta t = 125\, ns$ (zie figuur)

3c)
$t'_B = \gamma(t_B - \beta x_B);\ \ \beta = 0{,}6 \rightarrow \gamma = 1{,}25$
$$t_B = 0;\ x_B - x_A = \frac{L'}{\gamma} = \frac{100}{1{,}25} = 80\, ns \rightarrow t'_B = 1{,}25(0 - 0{,}6 \cdot 80) = -60\, ns$$

3d) zie figuur
3e) aflezen in figuur geeft $t'_C = 70\, ns;\ \ x'_C = 35$ ns

4a)

Behoud van 4-impuls:
$$\begin{bmatrix} hf \\ hf \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma M \\ \gamma M v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} hf + m = \gamma M \\ hf = \gamma M v \end{matrix} \rightarrow hf = (hf + m)v \rightarrow v = \frac{hf}{hf+m}$$

4b)
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{hf}{hf + m}\right)^2}} = \frac{hf + m}{\sqrt{(hf + m)^2 - (hf)^2}} = \frac{hf + m}{\sqrt{2mhf + m^2}}$$

$$hf + m = \gamma M \rightarrow M = \frac{hf + m}{\gamma} \rightarrow M = \sqrt{2mhf + m^2}$$

Alternatief: De totale massa van het systeem is behouden en invariant, dus de massa in het Centre of Mass-frame na de botsing is gelijk aan de totale massa van het systeem in het laboratoriumstelsel voor de botsing. De totale massa van het systeem voor de botsing in het laboratorium in het kwadraat is de totale energie in het kwadraat minus de totale impuls in het kwadraat. We krijgen dan:
$$M^2 = (hf + m)^2 - (hf)^2 \rightarrow M = \sqrt{2mhf + m^2}$$

4c)
$$K = (\gamma - 1)M = \left(\frac{hf + m}{\sqrt{2mhf + m^2}} - 1\right)\sqrt{2mhf + m^2} = hf + m - \sqrt{2mhf + m^2}$$

4d)
$$\beta_{CM} = v = \frac{hf}{hf + m} \rightarrow \gamma_{CM} = \frac{hf + m}{\sqrt{2mhf + m^2}}$$
Voor het foton:
$$P'_t = \gamma_{CM}(P_t - \beta_{CM} P_x) \rightarrow hf_{CM} = \frac{hf+m}{\sqrt{2mhf+m^2}}\left\{hf - \frac{hf}{hf+m} hf\right\} = \frac{(hf)^2 + mhf + (hf)^2}{\sqrt{2mhf+m^2}} = \frac{mhf}{\sqrt{2mhf+m^2}} \rightarrow$$
$$f_{CM} = \frac{m}{\sqrt{2mhf + m^2}} f$$

Alternatief: Bekijk de Dopplerverschuiving van het foton vanuit het stelsel waarin de totale impuls nul is. Dit stelsel is het stelsel waarin het deeltje na de botsing in rust is. Het gaat dus om het stelsel dat met snelheid $v = \frac{hf}{hf+m}$ t.o.v. het Home Frame beweegt.

De golflengte van het foton is in dit stelsel uitgerekt. De frequentie is lager: d.w.z.:

$$\frac{f_{CM}}{f} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} = \sqrt{\frac{1-\frac{hf}{hf+m}}{1+\frac{hf}{hf+m}}} = \sqrt{\frac{m}{2hf+m}} = \frac{m}{\sqrt{2mhf+m^2}} \rightarrow f_{CM} = \frac{m}{\sqrt{2mhf+m^2}}f$$